

Infos : Lundi prochain (16.09.2024), pas de cours (Fête Fédérale)

Mercredi prochain (18.09.2024) Le cours est remplacé par une vidéo (Lien sur moodle)
 Jeudi (19.09.2024) de 8h15 - 10h00 je serai en CO121 pour les questions sur le cours vidéo.

Dès le lundi 23 septembre, les cours du lundi seront retransmis en live dans l'auditoire ELA2

À propos des séries 2 et suivantes

Rappels

Notation / Définition 0.11 / 0.12 & 0.13

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}, \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

2 choses importantes avec $\mathbb{Q}$:

-1- Que des fractions de nombres entiers.

-2- Tout élément $\mathbb{Q}^*$ s'écrit de façon unique sous la forme de fraction irréductible $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

$\mathbb{R}$ = le reste. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

Théorème 0.14

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Preuve par l'absurde: (Voir polycopié exemple 0.55)

Pour montrer qu'une propriété P est vraie, on suppose que P est faux, puis, on fait des déductions correctes jusqu'à arriver à quelque chose d'absurde ou évidemment faux.

La seule erreur possible est dans l'hypothèse " P est faux"

$\Rightarrow$ "P est faux" est faux $\Rightarrow$ P est vrai

Preuve

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Par définition, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \text{ est un nombre pair}$$

$\Rightarrow$ a est un nombre pair. $\Rightarrow$ il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tq $a = 2 \cdot c$
 $2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2$ est un nombre pair.
 $\Rightarrow$ b est un nombre pair.

$\Rightarrow \frac{a}{b}$ est réductible par 2 $\nsubseteq$ contradiction, $\frac{a}{b}$ est à la fois réductible & irréductible.

$$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \square$$

Notation 0.16 : Symboles Σ et Π

Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq n$ et pour $k \in \mathbb{Z}$ tq $m \leq k \leq n$,
 $a_k \in \mathbb{R}$ un nombre qui peut dépendre de k . On note

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Exemples 0.17

$$(i) \sum_{k=m}^m a_k = a_m.$$

$$(ii) \sum_{k=0}^3 (2k+1) = \overset{k=0}{(2 \cdot 0 + 1)} + \overset{k=1}{(2 \cdot 1 + 1)} + \overset{k=2}{(2 \cdot 2 + 1)} + \overset{k=3}{(2 \cdot 3 + 1)}$$

$$= 1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

$$(iii) \sum_{k=-1}^1 14 = \underset{(k=-1)}{14} + \underset{(k=0)}{14} + \underset{(k=1)}{14} = 3 \cdot 14 = 42$$

Plus généralement $\sum_{k=m}^n \lambda = (n-m+1) \cdot \lambda$ $\left| \begin{array}{l} \lambda \text{ un nombre qui} \\ \text{ne dépend pas de} \\ k. \end{array} \right.$

$$(iv) \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Remarque 0.18:

Les expressions $\sum_{k=m}^n a_k$ & $\prod_{k=m}^n a_k$ ne dépendent pas de k .

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{\oplus=m}^n a_{\oplus}, \text{ idem pour } \prod$$

Proposition 0.19

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $j, l, m, n \in \mathbb{Z}$ tq $l \leq m \leq n$ et pour $k \in \mathbb{Z}$ tq $l \leq k \leq m+1$, $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$. Alors,

$$(i) \sum_{k=l}^m a_k + \sum_{k=l}^m b_k = \sum_{k=l}^m (a_k + b_k)$$

$$(ii) \sum_{k=l}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k = \sum_{k=l}^n a_k.$$

$$(iii) \sum_{k=l}^m \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=l}^m a_k.$$

$\triangle!$ λ ne dépend pas de $k!!$
 $\sum_{k=l}^m a_k \cdot b_k \neq a_k \cdot \sum_{k=l}^m b_k.$

(v) (Changement de variables 1)

$$\sum_{k=l}^n a_k = \sum_{k=l-j}^{n-j} a_{k+j}$$

(vi) (Changement de variables 2)

$$\sum_{k=l}^n a_k = \sum_{k=l}^n a_{n+l-k}.$$

$$\sum_{k=1}^3 (2k+1) = (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) = \overrightarrow{3+5+7} = 15$$

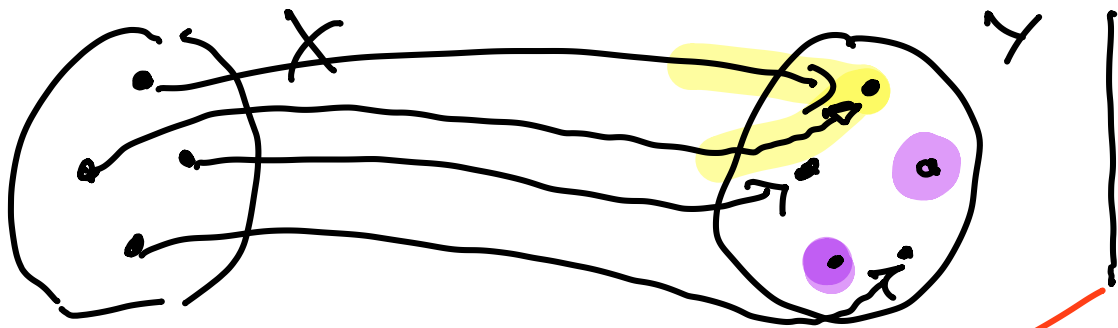
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (2(3+1-k) + 1) &= \sum_{k=1}^3 (9-2k) = (9-2 \cdot 1) + (9-2 \cdot 2) + (9-2 \cdot 3) \\ &= \overleftarrow{7+5+3} = 15 \end{aligned}$$

§0.3 Fonctions

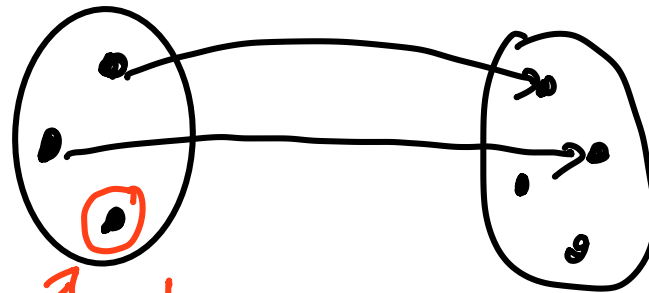
Définition 0.28

Le " f " de " x "

Soient X et Y des ensembles. Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est une façon d'associer à chaque élément $x \in X$ un unique élément $f(x) \in Y$



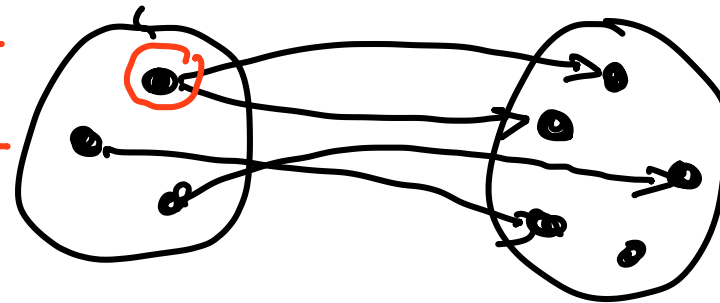
est une fonction!



n'est pas
une fonction

on doit lui trouver une image!

n'a pas le
droit d'avoir
2 images!!



n'est pas
une fonction

X est le domaine de f qu'on note aussi parfois $D(f)$,
 Y est le codomaine.

Définition 0.29

Soit $f: X \rightarrow Y$ une fonction, $A \subseteq X, B \subseteq Y$.

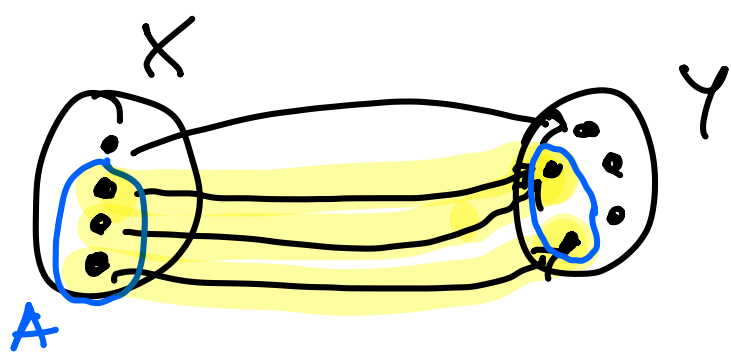
(i) L'ensemble image de A par f noté $f(A)$ est
l'ensemble

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\} = \{y \in Y : \exists a \in A \text{ tq } f(a) = y\}$$

"il existe"

(ii) L'ensemble image de f noté $\text{Im}(f)$ est l'ensemble

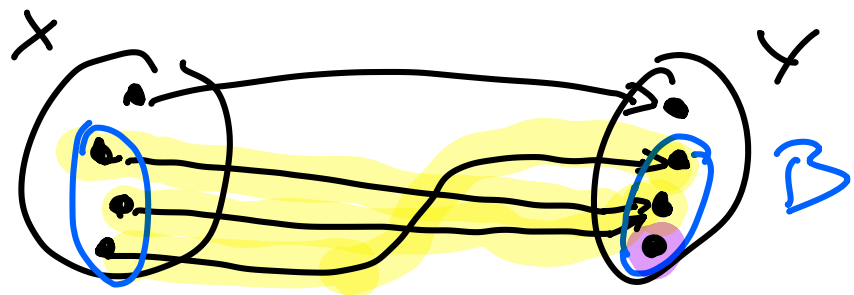
$$\text{Im}(f) = f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tq } f(x) = y\}$$



$$f(A) = ?$$

(iii) La préimage de B par f notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$



$$f^{-1}(B) = ?$$

⚠ écrire $f^{-1}(B)$ ne veut pas dire que f est inversible!

Ne pas confondre $f(\{x\})$ et $f(x) \leftarrow$ élément.
ensemble $\rightarrow$

Exemples 0.30

$$(i) f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$x \longmapsto f(x) = x^2$

$$f(\{1\}) = \{1\}$$

$$f(1) = 1.$$

$$f(\{-1, 0, 1\}) = \{1, 0\} = \{0, 1\}$$

$$f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{-1, 1\}$$

$$(ii) f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\frac{a}{b} \longmapsto f\left(\frac{a}{b}\right) = b.$$

$$f(0.5) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$= f\left(\frac{6}{12}\right) = 12.$$

Est-ce une fonction?

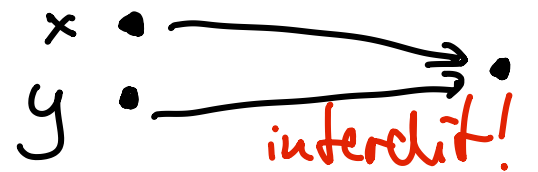
↗ car $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Définition 0.31 : Fonction injective, surjective, bijective

Soit $f: X \rightarrow Y$ une fonction.

(i) On dit que f est injective ou est une injection

si $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$



(ii) On dit que f est surjective ou est une surjection si

$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tq } f(x) = y$

(iii) On dit que f est bijective ou est une bijection si elle est injective et surjective.